

TENSOR W ZAPISIE LAGRANGE'A I EULERA

Na podstawie składowych wektora przemieszczeń obliczamy składowe tensora odkształcenia.

Tensor odkształcenia może być w zapisie Lagrange'a lub Eulera. We współrzędnych Lagrange'a ruch cząsteczki jest opisany jako funkcja wektora położenia początkowego (a_i) oraz czasu (t). We współrzędnych Eulera ruch cząsteczki jest opisany jako funkcja wektora położenia chwilowego (x_i) oraz czasu (t).

Definicja tensora odkształceń skończonych (dużych):

- Lagrange'a
$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_v}{\partial a_i} \times \frac{\partial u_v}{\partial a_j} \right]$$

- Eulera
$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_v}{\partial x_i} \times \frac{\partial u_v}{\partial x_j} \right]$$

Tensor odkształceń Lagrange'a i Eulera dla odkształceń nieskończenie małych:

$$l_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right]$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$$

czyli $l_{ij} \approx e_{ij}$

ODKSZTAŁCENIA GŁÓWNE

W każdym punkcie ciała istnieją 3 wzajemnie prostopadłe kierunki, w których odkształcenia liniowe (e_{11} , e_{22} , e_{33} lub l_{11} , l_{22} , l_{33}) mają wartości ekstremalne. Odkształcenia główne obliczamy na podstawie składowych tensora odkształceń.

Odkształceniom głównym nie towarzyszą zmiany kątów odkształcenia postaciowego.

Wyznaczamy je na podstawie równania:

$$-l^3 + M_1 l^2 - M_2 l + M_3 = 0$$

gdzie: M_1, M_2, M_3 niezmienniki tensora odkształcenia (liniowy, kwadratowy, sześcienny)

INTENSYWNOŚĆ ODKSZTAŁCEŃ

Reprezentacją odkształcenia w punkcie jest intensywność odkształceń wyrażona składowymi – odkształceniami głównymi lub pełnym tensorem odkształceń.

Intensywność odkształceń to odkształcenie liniowe (jednorodne), którego występowanie jest równoważne obecności złożonego stanu odkształcenia opisanego tensorem.

$$l_H = e_H = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{-\widehat{M}_2}$$

$$l_H = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(l_{11} - l_{22})^2 + (l_{22} - l_{33})^2 + (l_{33} - l_{11})^2 + 6(l_{12}^2 + l_{23}^2 + l_{31}^2)}$$

$$l_H = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(l(1) - l(2))^2 + (l(2) - l(3))^2 + (l(3) - l(1))^2}$$

Intensywność odkształceń składa się z odkształceń liniowych i postaciowych.

PRZYROSTY ODKSZTAŁCENIA

Są to nieskończenie małe zmiany odkształcenia, co w ujęciu funkcyjnym oznacza różniczkę odkształcenia.

W zapisie Lagrange'a:

$$dl_{ij} = \frac{1}{2} \left[d \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} \right) + d \left(\frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right) \right]$$

Teorię stanu odkształcenia należy właściwie rozpatrywać operując przyrostami odkształcenia, traktując je jako różniczki poszczególnych składowych stanu odkształcenia.

TENSOR PRĘDKOŚCI ODKSZTAŁCENIA

Pochodna tensora odkształcenia względem czasu jest tensorem prędkości odkształcenia.

$$\dot{l}_{ij} = \frac{d}{dt} (l_{ij})$$

$$\dot{l}_{ij} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right) \right]$$

$$\dot{l}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial a_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial a_i} \right)$$

znając składowe wektora (u_i) można obliczyć składowe tensora prędkości odkształcenia

Należy pamiętać, że:

$$l_{ij} = \int_{t=0}^t \dot{l}_{ij} dt$$

ODKSZTAŁCENIA LOGARYTMICZNE

Stosuje się je do opisu odkształceń plastycznych. Zwane są również odkształceniami rzeczywistymi. Dla dowolnego elementu liniowego odkształcanego plastycznie odkształcenie logarytmiczne można zdefiniować:

$$\delta = \ln \frac{l}{l_0}$$

gdzie: l chwilowa długość elementu liniowego

l_0 początkowa długość elementu liniowego

Inna definicja odkształcenia logarytmicznego:

$$d\delta = \frac{dl}{l} \quad \text{przyrost odkształcenia logarytmicznego (rzeczywistego) jest obliczany jako}$$

przyrost długości elementu liniowego do długości chwilowej tego elementu

$$\delta = \int_{l=l_0}^{l_{koń}} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_{koń}}{l_0}$$

Możemy określić 3 odkształcenia logarytmiczne, które są odkształceniami głównymi w kierunkach h, b, l .

$$\delta_h = \ln \frac{h_1}{h_0}$$

$$\delta_b = \ln \frac{b_1}{b_0}$$

$$\delta_l = \ln \frac{l_1}{l_0}$$

Dla kierunków x_1, x_2, x_3 :

$$\delta_1 = \ln \frac{x_1}{a_1}$$

$$\delta_2 = \ln \frac{x_2}{a_2}$$

$$\delta_3 = \ln \frac{x_3}{a_3}$$

gdzie: a_1, a_2, a_3 początkowe długości elementów w kierunku x_1, x_2, x_3

x_1, x_2, x_3 końcowe długości elementów w kierunkach osi x_1, x_2, x_3

Dla materiału nieściśliwego otrzymujemy:

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$$

Stan odkształcenia w mierze logarytmicznej określony jest przez tensor odkształcenia.

$$\varepsilon_{ij}^{\delta} \Rightarrow \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix} \quad \text{tensor odkształceń głównych}$$

Średnie odkształcenie logarytmiczne δ_0 :

$$\delta_0 = \frac{1}{3}(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)$$

Dla materiału nieściśliwego $\delta_0=0$.

Dla tensora $\varepsilon_{ij}^{\delta}$ można wyznaczyć odkształcenie zastępcze δ_i (intensywność odkształceń logarytmicznych (rzeczywistych)). Wartość δ_i zależy od przebiegu odkształcenia. Dla odkształceń proporcjonalnych ($\delta_1:\delta_2:\delta_3=\text{const}$ w czasie odkształcenia) zastępcze odkształcenie δ_i obliczamy wg zależności:

$$\delta_i = 2\sqrt{\frac{1}{3}N} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}$$

$$\delta_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\delta_1 - \delta_2)^2 + (\delta_2 - \delta_3)^2 + (\delta_3 - \delta_1)^2}$$

Dla odkształceń nieproporcjonalnych:

$$\Delta\delta_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\Delta\delta_1^2 + \Delta\delta_2^2 + \Delta\delta_3^2}$$

gdzie: $\Delta\delta_i$ przyrost intensywności odkształcenia

$\Delta\delta_1, \Delta\delta_2, \Delta\delta_3$ przyrosty odkształceń w kierunkach x_1, x_2, x_3

Całkowite zastępcze odkształcenie liniowe otrzymamy przez sumowanie przyrostów $\Delta\delta_i$.

$$\delta_i = \sum_{i=1}^n \Delta\delta_i$$

INNE MIARY ODKSZTAŁCENIA PLASTYCZNEGO

(a) Odkształcenie bezwzględne

$$\Delta l = l_1 - l_0$$

$$\Delta h = h_1 - h_0$$

$$\Delta b = b_1 - b_0$$

(b) Odkształcenie względne

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\varepsilon_h = \frac{\Delta h}{h_0}$$

$$\varepsilon_b = \frac{\Delta b}{b_0}$$

Odkształcenie względne jest związane z odkształceniem logarytmicznym następującą zależnością:

$$\delta = \ln(1 + \varepsilon)$$